

Thermodynamique | Chapitre 2 | Correction TD (02)

Exercice n°1 • Compressions un gaz parfait

cours

La première transformation est monotherme : la température extérieure T_0 reste constante ; et monobare : la pression extérieure $P_0 + Mg/S$ reste constante.

La seconde transformation est isotherme : il y a constamment équilibre thermodynamique, donc thermique (la température du gaz reste constante) et mécanique (la pression augmente au fur et à mesure de l'ajout des masses).

Les deux transformations ont en même état final. L'équilibre thermique assure que $T_f = T_0$. L'équilibre mécanique assure que :

$$0 = P_f S - P_0 S - Mg \Rightarrow P_f = P_0 + \frac{Mg}{S} = P_0 (1 + x)$$

Enfin, l'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$nRT_0 = P_0 V_0 = P_f V_f \Rightarrow V_f = \frac{V_0}{1 + x}$$

Puisque U est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi par la transformation. Dans les deux cas :

$$\Delta U = C_V \Delta T = 0$$

D'après le premier principe, on a donc :

$$\Delta U = 0 = W + Q \Rightarrow Q = -W$$

Calculons le travail des forces de pression W pour chaque transformation.

Pour la transformation n°1 (monobare), la pression extérieure est constante $P_{ext} = P_0 + Mg/S = P_0 (1 + x)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} W_1 &= - \int_{V_0}^{V_f} P_{ext} dV = -P_0 (1 + x) \int_{V_0}^{V_f} dV = -P_0 (1 + x) (V_f - V_0) \\ &= x P_0 V_0 = x n R T_0 \end{aligned}$$

Pour la transformation n°2 (monotherme), la pression extérieure est constante égale à la pression du gaz (transformation lente) et la température du gaz est constamment égale à la température extérieure T_0 . On en déduit :

$$\begin{aligned} W_2 &= - \int_{V_0}^{V_f} P_{ext} dV = - \int_{V_0}^{V_f} P dV = - \int_{V_0}^{V_f} \frac{nRT_0}{V} dV \\ &= -nRT_0 \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) = nRT_0 \ln(1 + x) \end{aligned}$$

Remarque : on a toujours $W_1 > W_2$ puisque $x > \ln(1 + x)$.

Exercice n°2 • Détente de Joule-Gay-Lussac

cours

On considère le système fermé {gaz + vide}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que $\Delta U_{syst} = 0$.

Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\Delta U_{syst} = \underbrace{\Delta U_{GP}}_{= C_V \Delta T} + \underbrace{\Delta U_{vide}}_{= 0} = 0$$

On en déduit : $\Delta T = 0$

Exercice n°3 • Échauffement par effet Joule

cours

On applique le premier principe au liquide. L'enceinte est calorifugée donc il n'y a pas d'échange de chaleur. La résistance fournit un travail électrique $W_{Joule} = RI^2 \Delta t$. Ainsi :

$$\Delta U = n C_{V,m} \Delta T = RI^2 \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{n C_{V,m}}{RI^2}$$

Exercice n°4 • Mélange de gaz parfaits

cours

On considère le système fermé {GP1 + GP2}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que $\Delta U_{syst} = 0$.

Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\Delta U_{syst} = \Delta U_{GP1} + \Delta U_{GP2} = n_1 C_{V,m} (T_f - T_1) + n_2 C_{V,m} (T_f - T_2) = 0$$

On en déduit :

$$T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$$

Exercice n°5 • Transformations infinitésimales

cours

1) On prend la différentielle du log de l'équation d'état des gaz parfaits.

$$PV = nRT \Rightarrow \ln(P) + \ln(V) = \ln(n) + \ln(R) + \ln(T)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T}$$

2) Dans un petit compartiment et dans l'ensemble des compartiments de droite, on a :

$$P_2 dV = dn RT \quad \text{et} \quad P_2 V_2 = n_2 RT$$

On en déduit :

$$dV = \frac{V_2}{n_2} dn \Rightarrow \int_{V_1}^V dV = \frac{V_2}{n_2} \int_{n_1}^n dn \Rightarrow V = V_1 + \frac{V_2}{n_2} (n - n_1)$$

Remarque : on a bien que $V = V_1$ lorsque $n = n_1$ et $V = V_1 + V_2$ lorsque $n = n_1 + n_2$.

3) On considère le système fermé {GP à gauche + GP du compartiment suivant}. Au cours de la transformation, le système ne reçoit ni travail (parois rigides donc volume constant), ni chaleur (parois calorifugées). Le premier principe assure donc que $dU_{\text{syst}} = 0$.

Par additivité de l'énergie interne, on a :

$$\begin{aligned} dU_{\text{syst}} &= dU_{\text{gauche}} + dU_{\text{compartiment}} \\ &= n C_{V,m} \left(\underbrace{T + dT}_{= T_f} - T \right) + dn C_{V,m} \left(\underbrace{T + dT}_{= T_f} - T_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

On travaille au premier ordre :

$$n C_{V,m} dT + dn C_{V,m} (T - T_2) = 0 \Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{dT}{T_2 - T}$$

On intègre :

$$\begin{aligned} \int_{n_1}^n \frac{dn}{n} &= \int_{T_1}^T \frac{dT}{T_2 - T} \Rightarrow \ln\left(\frac{n}{n_1}\right) = \ln\left(\frac{T_2 - T}{T_2 - T_1}\right) \\ &\Rightarrow T = \frac{n_1 T_1 + (n - n_1) T_2}{n} \end{aligned}$$

Remarque : on a bien que $T = T_1$ lorsque $n = n_1$ et $T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2}$ lorsque $n = n_1 + n_2$.

Exercice n°6 • Échauffement d'un gaz parfait

☆☆☆

1) On applique le PFD sur le piston dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On se place à l'équilibre et on néglige le poids du piston :

$$0 = -P_0 S + PS \Rightarrow P = P_0 = \frac{nRT_0}{Sh} \Rightarrow h = \frac{nRT_0}{P_0 S} = 25 \text{ cm}$$

2) C'est une transformation isochore et monotherme.

Travail : $W = 0$ (car isochore).

$$\text{Énergie interne (GP diatomique)} : \Delta U = \frac{5}{2} nR (T_1 - T_0).$$

$$\text{D'après le premier principe sur le gaz : } Q = \frac{5}{2} nR (T_1 - T_0).$$

3) C'est une transformation isobare.

$$\text{État final : } T_1, P_1 = P_0 \text{ et donc : } V_1 = \frac{nRT_1}{P_0}$$

Travail :

$$W' = - \int_{V_0}^{V_1} P_0 dV = -nR (T_1 - T_0)$$

$$\text{D'après le premier principe (version enthalpique) : } \Delta H' = Q' = \frac{7}{2} nR (T_1 - T_0)$$

Exercice n°7 • Gaz de Van der Waals

☆☆☆

1) Par définition :

$$C_{V,m} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right)_V = \eta = cte$$

2) Non. En effet :

$$\Delta U = \eta n \Delta T - n^2 a \Delta \left(\frac{1}{V} \right) = C_V \Delta T - \underbrace{n^2 a \Delta \left(\frac{1}{V} \right)}_{\neq 0}$$

Exercice n°8 • Évolution irréversible



1) Équilibre mécanique (PFD) :

$$0 = P_2 S - P_1 S - mg \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} = 1,062 \text{ bar}$$

La transformation est supposée adiabatique : $Q_{12} = 0$

Remarque : Attention dans cette question, bien que l'on ait une transformation monobare à P_2 , il n'est pas possible d'utiliser la version enthalpique du premier principe car l'état initial ($t = 0^+$) n'est pas un état équilibre mécanique.

Travail :

$$W_{12} = -P_2 (V_2 - V_1) = -nR \left(T_2 - \frac{P_2}{P_1} T_1 \right)$$

Énergie interne :

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2} nR (T_2 - T_1)$$

Le premier principe donne :

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} = W_{12} &\Rightarrow \frac{5}{2} (T_2 - T_1) = - \left(T_2 - \frac{P_2}{P_1} T_1 \right) \\ &\Rightarrow \frac{7}{2} T_2 = \left(\frac{5}{2} + \frac{P_2}{P_1} \right) T_1 \\ &\Rightarrow T_2 = \left(\frac{5}{7} + \frac{2P_2}{7P_1} \right) T_1 = 302 \text{ K} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = 1,93 \text{ L} \quad \text{et} \quad W_{12} = 7,00 \text{ J}$$

2) On a équilibre mécanique et thermique :

$$P_3 = P_2 = 1,062 \text{ bar} \quad \text{et} \quad T_3 = T_1 = 298 \text{ K}$$

$$\text{On en déduit : } V_3 = \frac{nRT_3}{P_3} = 1,91 \text{ L.}$$

La transformation est isobare à P_2 et monotherme à T_1 .

Travail :

$$W_{23} = -P_3 (V_3 - V_2) = 2,80 \text{ J}$$

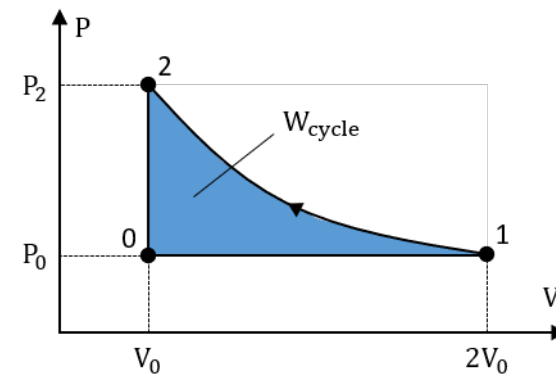
Premier principe version enthalpique :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = \frac{7}{2} nR (T_3 - T_2) = -9,81 \text{ J}$$

Exercice n°9 • Cycle de Lenoir



1) Cycle :



2) État 0 :

$$V_0 = 14 \text{ L} \quad \text{et} \quad P_0 = 2 \text{ bar} \Rightarrow T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR} = 337 \text{ K}$$

État 1 :

$$P_1 = P_0 = 2 \text{ bar} \quad \text{et} \quad V_1 = 2V_0 = 28 \text{ L} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = 674 \text{ K}$$

État 2 :

$$V_2 = V_0 = 28 \text{ L} \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 = 674 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = 4 \text{ bar}$$

3) Transformation 0 → 1 :

$$W_{01} = - \int_{V_0}^{V_1} P_0 dV = -P_0 V_0 = -2,8 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_{01} = \frac{3nR}{2} (T_1 - T_0) = \frac{3P_0 V_0}{2} = 4,2 \text{ kJ}$$

$$Q_{01} = \Delta U_{01} - W_{01} = 7,0 \text{ kJ}$$

Transformation 1 → 2 :

$$W_{12} = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = 2P_0 V_0 \ln(2) = 3,9 \text{ kJ}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3nR}{2} (T_2 - T_1) = 0$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} = -3,9 \text{ kJ}$$

Transformation 2 → 0 :

$$W_{20} = 0$$

$$\Delta U_{20} = \frac{3nR}{2} (T_0 - T_2) = -\frac{3P_0 V_0}{2} = -4,2 \text{ kJ}$$

$$Q_{20} = \Delta U_{20} - W_{20} = -4,2 \text{ kJ}$$

Pour avoir les différentes énergies sur un cycle complet, c'est-à-dire pour une transformation 0 → 1 → 2 → 0, il suffit de sommer les contributions de chaque transformation.

$$W_{cycle} = P_0 V_0 (2 \ln(2) - 1) = 1,1 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad \Delta U_{cycle} = 0$$

4) Le travail est l'aire du cycle.

5) Non. Deux justifications possibles :

- $W_{cycle} > 0$ donc c'est un récepteur.
- Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc c'est un cycle récepteur.

Exercice n°10 • Bilans énergétiques



1) Soit le système {GP n°1 + GP n°2 + résistor}. Le système ne reçoit ni travail ni chaleur au cours de la transformation. Donc $W_{fp,syst} = 0$ et $Q_{syst} = 0$. Le premier principe + l'additivité de l'énergie interne donnent :

$$\begin{aligned} \Delta U_{syst} &= RI_0^2 \Delta t \\ &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{syst} \\ &= \frac{3}{2} nR \Delta T_1 + \frac{3}{2} nR \Delta T_2 + C \Delta T_1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$RI_0^2 \Delta t = \left(\frac{3P_0 V_0}{2T_0} + C \right) \Delta T_1 + \frac{3P_0 V_0}{2T_0} \Delta T_2$$

2) On a donc $\Delta T_2 = 60 \text{ K}$. On en déduit :

$$\Delta T_1 = \frac{RI_0^2 \Delta t - \frac{3P_0 V_0}{2T_0} \Delta T_2}{\frac{3P_0 V_0}{2T_0} + C} = 82 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 382 \text{ K}$$

3) À l'équilibre mécanique, les pressions P_1 et P_2 sont égales et on a donc :

$$\frac{P}{nR} = cte = \frac{T}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{V_2} = \frac{T_1}{V_1}$$

De plus, $V_1 + V_2 = 2V_0$. Ainsi,

$$V_1 = \frac{2V_0 T_1}{T_2 + T_1} = 1,03 \text{ L} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{2V_0 T_2}{T_2 + T_1} = 0,97 \text{ L}$$

On obtient pour les pressions :

$$P_1 = P_2 = \frac{nRT_1}{V_1} = 1,24 \text{ bar}$$

4) La capacité thermique du gaz est :

$$C_V = \frac{3}{2} nR = 0,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

largement inférieure à celle du résistor. Négliger la capacité thermique du résistor aurait donc conduit à des résultats numériquement très différents.

Exercice n°11 • Détente d'un gaz sous l'action d'un ressort

Équations d'état des gaz parfait :

$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad P_f V_f = nRT_f$$

Équilibre mécanique du piston à l'état final :

$$0 = P_f S + k(\ell_f - \ell_0) \quad \Rightarrow \quad P_f = \frac{k}{S}(\ell_0 - \ell_f)$$

On applique le premier principe au système {gaz parfait + piston + vide}. Il y a ni travail, ni chaleur échangée. Il faut prendre en compte la variation d'énergie potentielle élastique.

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0) + \frac{1}{2}k(\ell_f - \ell_0)^2 = 0$$

Relation volume / longueur du ressort :

$$V_f = V_0 + S(\ell_0 - \ell_f)$$

On a autant d'équations que d'inconnues, on peut se lancer dans l'établissement de l'équation.

$$\begin{aligned} & \frac{nR}{\gamma - 1}(T_f - T_0) + \frac{1}{2}k(\ell_f - \ell_0)^2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{P_f}{nR} V_f - T_0 \right) + \frac{1}{2}k(\ell_f - \ell_0)^2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{P_f}{nR} V_0 + \frac{P_f}{nR} S(\ell_0 - \ell_f) - T_0 \right) + \frac{1}{2}k(\ell_f - \ell_0)^2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{P_f}{nR} V_0 + \frac{S^2 P_f^2}{knR} - T_0 \right) + \frac{S^2 P_f^2}{2k} = 0 \\ \Rightarrow & \boxed{\frac{(\gamma + 1) S^2}{2k} P_f^2 + V_0 P_f - nRT_0 = 0} \end{aligned}$$

On peut alors en déduire que :

$$P_f = \frac{k}{(\gamma + 1) S^2} \left(-V_0 + \sqrt{V_0^2 + \frac{2(\gamma + 1) nRT_0 S^2}{k}} \right)$$

Tous les autres paramètres peuvent alors se déduire des relations précédentes.